

Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	<b>Devoir de synthèse n° 1</b> Mathématiques	Classe : 4 <sup>ème</sup> Sc exp
Date : 09 /12 / 2009	Profs : Mme Turki et Mrs Baccar, Hamza et Meddeb	Durée : 2 heures

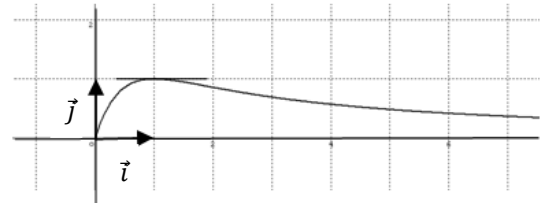
Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux sans justification.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note sera ramenée à zéro.

- 1) Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $[0, +\infty[$ .

La courbe représentative de sa fonction dérivée  $f'$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est donnée par le graphique ci-contre.



Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

a/  $f$  est décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

b/ Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$ .

c/  $\mathcal{C}$  a une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

- 2) Soit  $g$  une fonction dérivable sur  $IR_+$  telle que, pour tout  $x \in IR_+$ ,  $-\frac{2}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$ .

On a alors, pour tout  $x \in IR_+$

a/  $-\frac{2}{3}x \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x$ .

b/  $|g(x) - g(0)| \leq \frac{2}{3}x$ .

c/ Si  $g(0) = 0$ , alors la courbe représentative de  $g$  est comprise entre les droites d'équations :

$$y = \frac{-2}{3}x \text{ et } y = \frac{1}{3}x.$$

Exercice n°2 : (5,5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . unité graphique : 2cm.

- 1) On rappelle que, pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$  :  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  $z^3 = 8$ .

- 2) On désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$  définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + i\sqrt{3} \text{ et } c = -1 - i\sqrt{3}.$$

a/ Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes  $b$  et  $c$ .

b/ Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

- 3) Soit  $B'$  le point d'affixe  $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$ .

a/ Montrer que le triangle  $ABB'$  est rectangle et isocèle en  $A$ .

b/ Placer le point  $B'$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

- 4) Soit  $M$  le milieu de  $[BB']$ , on désigne par  $m$  l'affixe de  $M$ .

a/ Montrer que  $m = \frac{(1+\sqrt{3})}{2} (1 + i\sqrt{3})$ .

b/ En déduire que les points  $O$ ,  $C$  et  $M$  sont alignés.

Exercice n°3 : (4,5 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1, 1]$  par :  $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ .

- 1) a/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1 et à droite en  $(-1)$ .  
b/ Interpréter géométriquement les résultats.
- 2) a/ Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et calculer  $f'(x)$ .  
b/ Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $]0, 1[$  une solution unique  $\alpha$ .

Exercice n°4 : (7 pts)

On considère les suites  $U$  et  $V$  définies sur  $IN$  par :

$$U_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in IN \quad V_n = \frac{2}{U_n} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

- 1) Calculer :  $V_0, U_1, V_1, U_2$  et  $V_2$ .
- 2) Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in IN$ , on a :  $\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ \text{et} \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$
- 3) Montrer que, pour tout  $n \in IN$ , on a :  $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$ . [1] (On pourra remarquer que :  $U_n \cdot V_n = 2$ ).
- 4) Montrer par récurrence, que pour tout  $n \in IN$ , on a :  $U_n > V_n$ .
- 5) Montrer que  $U$  est décroissante et que  $V$  est croissante.
- 6) Montrer que, pour tout  $n \in IN$ , on a :  $U_n - V_n \leq 1$ .  
En déduire que  $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$ . [2]
- 7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout  $n \in IN$ , on a :

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4} (U_n - V_n).$$

En déduire que, pour tout  $n \in IN$ , on a :  $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

- 8) Montrer que les deux suites  $U$  et  $V$  sont convergentes vers la même limite  $\ell$  qu'on calculera.

Bonne chance

